

# シフトセットタブローと $K$ -theoretic Schur $P, Q$ 函数の特殊値について

神戸大学 大学院理学研究科 数学専攻

島崎達史 (Tatsushi SHIMAZAKI) \*

## 概要

シフトセットタブローは、 $K$  理論的 Schur  $P, Q$  函数を組み合わせて論的に表現するため、池田岳氏と成瀬弘氏によって導入された。本講演では、シフトセットタブローの個数に関する性質を、 $K$  理論的 Schur  $P, Q$  函数の特殊値を用いて述べる。また、 $K$  理論的歪 Schur  $P, Q$  函数の特殊値からシフト歪セットタブローの個数の特性についても触れる。本講演は、神戸大学の信川喬彦氏との共同研究と、早稲田大学の中山勇祐氏、杉本奨吾氏との議論に基づく。

## 1 導入

Schur  $Q$  函数は、対称群の射影表現の研究において Schur が導入した対称函数である [7]。Schur 函数が対称群または一般線型群の既約表現の指標を表すように、Schur  $Q$  函数は対称群の既約射影表現の指標を表す。また、Schur 函数は半標準盤（タブロー）を用いて定義できるのと同様に、Schur  $P$  函数もシフトされた半標準盤（シフトタブロー）を用いて定義できる。さらに、Schur  $P$  函数と Schur  $Q$  函数は密接に関係しており、互いに他方を用いて表現することが可能である。本講演では、Schur  $P, Q$  函数をシフトタブローを用いた組合せ論的表示を定義とする。

Schur  $P$  函数, Schur  $Q$  函数の各々の  $K$  理論版として、 $GP$  函数と  $GQ$  函数が池田岳氏と成瀬弘氏により導入された [2]。これらは Schubert calculus において、Schubert class を表す特殊函数（または特殊多項式）である。  $GP$  函数,  $GQ$  函数もまたシフトされた集合値半標準盤（シフトセットタブロー）を用いて組合せ論的に定義できる。ここでは、これらの函数もシフトセットタブローを用いた表示を定義とし議論する。

### 1.1 ストリクトな分割とシフトされた Young 図形およびシフトタブロー

非負の整数列  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  が  $\lambda_i > \lambda_{i+1} > 0$  ( $1 \leq i \leq r-1$ ) を満たすとき、 $\lambda$  をストリクトな分割 (strict partition) とよぶ。集合  $SP$  を非負整数のストリクトな分割の全体とし、集合  $SP_l$  を非負整数  $l$  のストリクトな分割の全体とする。集合  $SP_l$  に属するストリクトな分割は、 $r$  個の異なる正の整数  $\lambda_i$  から成り、 $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = l$  とする。また、非負の整数列  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  と

---

\* E-mail: tsimazak@math.kobe-u.ac.jp

$(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0)$  を同一視する. 分割  $\lambda$  の長さを,  $\lambda_r > 0$  かつ  $\lambda_{r+1} = 0$  をみたます正の整数  $r$  と定義し, この長さを  $r = \ell(\lambda)$  と書く.

ストリクトな分割  $\lambda$  に対して, 形が  $\lambda$  であるシフトされた Young 図形 (shifted Young diagram) は次のように定義される.

$$\text{SYD}_\lambda := \{(i, j) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda), i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}.$$

シフトされた Young 図形を, 正方形を用いて図示し, ここではそれらを箱とよぶ. また, ストリクトな分割  $\lambda \in \mathcal{SP}$  と, それに対応するシフトされた Young 図形を同一視する. たとえば, ストリクトな分割  $\lambda = (4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_7$  に対応するシフトされた Young 図形は, 以下である.

$$\lambda = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \\ & & \square & \\ & & & \square \end{array}.$$

正の整数  $k \in [n] := \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) に対して,  $k' := k - \frac{1}{2}$  と定義する. 即ち, このとき  $k-1 < k' < k$  が成り立つ. また,  $[n'] := \{1', 2', \dots, n'\}$  および  $[n', n] := \{1', 1, 2', 2, \dots, n', n\}$  と書く.

**定義 1.1.** 形が  $\lambda$  のシフトされた半標準盤 (shifted semistandard tableaux) は, 写像  $T : \text{SYD}_\lambda \rightarrow [n', n]$  であり, 以下の条件をみたすものをいう.

- (1)  $|T_{i,j}| = 1, \quad T_{i,j} \leq T_{i,j+1}, \quad T_{i,j} \leq T_{i+1,j};$
- (2)  $k \in [n]$  は各列に高々 1 回だけ現れる;
- (3)  $k' \in [n']$  は各行に高々 1 回だけ現れる;
- (4)  $T_{i,i} \subseteq [n];$

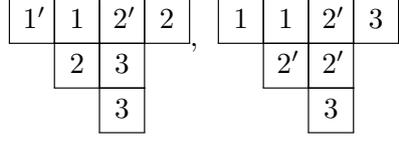
ただし,  $T_{i,j} \in [n', n]$  である.

シフトされた半標準盤を, ここではシフトタブローとよび  $T$  と書く. 形が  $\lambda$  であり, 箱に入れる変数の個数が  $n$  であるすべてのシフトタブローを  $\text{ShT}_P(\lambda, n)$  と記す. さらに, シフトタブローのうち, 条件 (4) を除外したものの全体を  $\text{ShT}_Q(\lambda, n)$  と表す. ここでは,  $\text{ShT}_P(\lambda, n) \neq \emptyset$  かつ  $\text{ShT}_Q(\lambda, n) \neq \emptyset$  である場合のみを考える.

**例 1.1.**  $\lambda = (4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_7, n = 3$  とする. 以下のように,  $\text{ShT}_P(\lambda, 3)$  および  $\text{ShT}_Q(\lambda, 3)$  から, それぞれシフトタブローを 2 つ選ぶ.

$$\begin{aligned} \text{ShT}_P(\lambda, 3) \ni T_1 = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ & \boxed{2} & \boxed{2} & \\ & & \boxed{3} & \end{array}, & T_2 = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{3'} & \boxed{3} \\ & \boxed{2} & \boxed{3'} & \\ & & \boxed{3} & \end{array}. \\ \\ \text{ShT}_Q(\lambda, 3) \ni T_3 = \begin{array}{cccc} \boxed{1'} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2'} \\ & \boxed{2} & \boxed{2} & \\ & & \boxed{3} & \end{array}, & T_4 = \begin{array}{cccc} \boxed{1'} & \boxed{2'} & \boxed{3'} & \boxed{3} \\ & \boxed{2'} & \boxed{3'} & \\ & & \boxed{3} & \end{array}. \end{aligned}$$

他方, 以下の2つの図形は,  $\text{ShT}_P(\lambda, 3)$  および  $\text{ShT}_Q(\lambda, 3)$  のどちらにも属さない.



$\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$  は許されない.  $\begin{pmatrix} k' & k' \end{pmatrix}$  は許されない.

シフトタブロー  $T$  のウェイト  $\omega(T)$  を以下で定義める.

$$\omega(T) := (\omega_1(T), \omega_2(T), \dots, \omega_n(T)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n. \quad (1.1)$$

ここで,  $\omega_k(T) = |\{k', k \in [n', n] \mid k', k \in T\}|$  とする. また, ウェイト  $\omega(T)$  を用いて,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  に対応する単項式  $x^{\omega(T)}$  を次で定める.

$$x^{\omega(T)} := x_1^{\omega_1(T)} x_2^{\omega_2(T)} \dots x_n^{\omega_n(T)}. \quad (1.2)$$

例 1.1の  $T_1$  から  $T_4$  の単項式は, 次のようになる.

$$x^{\omega(T_1)} = x_1^3 x_2^3 x_3, \quad x^{\omega(T_2)} = x_1^2 x_2 x_3^4, \quad x^{\omega(T_3)} = x_1^3 x_2^3 x_3, \quad x^{\omega(T_4)} = x_1 x_2^2 x_3^4.$$

Schur  $P$ ,  $Q$  関数は, 次のように定義される.

$$P_\lambda(x) := \sum_{T \in \text{ShT}_P(\lambda, n)} x^{\omega(T)}, \quad (1.3)$$

$$Q_\lambda(x) := \sum_{T \in \text{ShT}_Q(\lambda, n)} x^{\omega(T)}. \quad (1.4)$$

これらは, 以下の等式をみたす.

$$Q_\lambda(x) = 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda(x).$$

## 1.2 集合値シフトタブローと $K$ 理論的 Schur $P$ , $Q$ 関数

文献 [2] に従い, シフトされた集合値半標準盤を次のように定める.

**定義 1.2** ([2]). 形が  $\lambda$  であるシフトされた集合値半標準タブローは, 次の条件を満たす写像  $T: \text{SYD}_\lambda \rightarrow [n', n]$  である.

- (1)  $|T_{i,j}| \geq 1$ ,  $\max T_{i,j} \leq \min T_{i,j+1}$ ,  $\max T_{i,j} \leq \min T_{i+1,j}$ ;
- (2)  $k \in [n]$  は各列において最大1回しか現れない;
- (3)  $k' \in [n']$  は各行において最大1回しか現れない;
- (4)  $T_{i,i} \subseteq [n]$ ;

ここで,  $T_{i,j} \subseteq [n', n]$  である.

シフトされた集合値半標準タブローをシフトセットタブローとよび、形が  $\lambda$  であり変数の個数が  $n$  であるシフトセットタブロー全体を  $\text{SSVT}_P(\lambda, n)$  と書く。さらに、定義 1.2 の条件 (4) を除いたシフトセットタブローの集合を  $\text{SSVT}_Q(\lambda, n)$  と記す。ここでは、 $\text{SSVT}_P(\lambda, n) \neq \emptyset$  および  $\text{SSVT}_Q(\lambda, n) \neq \emptyset$  である場合を考える。

**例 1.2.**  $\lambda = (4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_7$ ,  $n = 3$  とする。  $\text{SSVT}_P(\lambda, 3)$  および  $\text{SSVT}_Q(\lambda, 3)$  のそれぞれから 2 つのシフトセットタブローを以下のように取る。

$$\begin{aligned} \text{SSVT}_P(\lambda, 3) \ni T^{(1)} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3' \\ \hline & 2 & 23' & \\ \hline & & 3 & \\ \hline \end{array}, & T^{(2)} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2' & 2 & 23 \\ \hline & 2 & 3' & \\ \hline & & 3 & \\ \hline \end{array}. \\ \\ \text{SSVT}_Q(\lambda, 3) \ni T^{(3)} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1' & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2' & 2 & \\ \hline & & 3'3 & \\ \hline \end{array}, & T^{(4)} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1' & 1 & 1 & 123 \\ \hline & 2 & 2 & \\ \hline & & 3' & \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

本講演では、変数の個数が 1 桁である例のみを扱う。そのため、シフトセットタブローの箱に割り当てる変数たちの間のカンマ「,」を省略する。たとえば、 $T^{(2)}$  の  $\boxed{23}$  は箱  $(1, 4) \rightarrow T_{1,4} = \{2, 3\} \subset [3]$  を割り当てていることとする。

$T \in \text{SSVT}_P(\lambda, n)$  および  $T \in \text{SSVT}_Q(\lambda, n)$  のウェイト  $\omega(T)$  を (1.1), 単項式  $x^{\omega(T)}$  を (1.2) で各々定める。例 1.2 における  $T^{(1)}$  から  $T^{(4)}$  に対応する単項式は、次のようになる。

$$x^{\omega(T^{(1)})} = x_1^3 x_2^2 x_3^3, \quad x^{\omega(T^{(2)})} = x_1 x_2^4 x_3^3, \quad x^{\omega(T^{(3)})} = x_1^4 x_2^2 x_3^2, \quad x^{\omega(T^{(4)})} = x_1^4 x_2^3 x_3^2.$$

[2] に基づき、 $K$  理論的 Schur  $P$  および  $Q$  関数は次のように定義される。

$$GP_\lambda(x | \beta) := \sum_{T \in \text{SSVT}_P(\lambda, n)} \beta^{|T| - |\lambda|} x^{\omega(T)}, \quad (1.5)$$

$$GQ_\lambda(x | \beta) := \sum_{T \in \text{SSVT}_Q(\lambda, n)} \beta^{|T| - |\lambda|} x^{\omega(T)}. \quad (1.6)$$

ここで、 $|T|$  はシフトセットタブロー  $T$  に割り当てられた正の整数および正の半整数の個数を表す。式 (1.5) および (1.6) において  $\beta = 0$  とすると、 $GP_\lambda(x | 0) = P_\lambda(x)$  および  $GQ_\lambda(x | 0) = Q_\lambda(x)$  が成り立つ。

## 2 主結果

### 2.1 $GP$ 関数 $GP_\lambda$ および $GQ$ 関数 $GQ_\lambda$ の特殊値とシフトセットタブローの個数の奇数性

$GP$  関数および  $GQ$  関数について、以下のことを明らかにした。

**定理 2.1** ([4]). 任意の  $\lambda \in SP$  に対し, 次が成り立つ.

$$GP_\lambda(\beta, \dots, \beta | -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda|}, \quad (2.1)$$

$$GQ_\lambda(\beta, \dots, \beta | -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda|}. \quad (2.2)$$

証明は, シフトセットタブローに作用する符号反転対合 (sign-reversing involution)  $\iota_P$  および  $\iota_Q$  を各々構成し, 組合せ論的に行った. ここでは, 例を用いることにより (2.1) の証明の流れを述べる.

**例 2.1.**  $\lambda = (4, 2, 1) \in SP_7$  とし,  $n = 3$  とする. まず, シフトされた Young 図形の相異なる箱  $(i, j)$  と  $(\tilde{i}, \tilde{j})$  に対し, 順序を以下で定める.

$$(i, j) < (\tilde{i}, \tilde{j}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} j < \tilde{j}, \\ j = \tilde{j} \text{ and } i < \tilde{i}. \end{cases} \quad (2.3)$$

即ち, より左上にある箱が順序として小さいものとする. 次に, 各箱  $(i, j)$  に  $T_{i,j} = \{i\} \in [3]$  を割り当てたシフトセットタブローを  $T_P \in \text{SSVT}'_P(\lambda, 3)$  とする.

$$T_P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & \\ \hline & & 3 & \\ \hline \end{array}.$$

このとき,

$$\text{SSVT}'_P(\lambda, n) := \text{SSVT}_P(\lambda, n) \setminus \{T_P\}.$$

とする. シフトセットタブロー  $T \in \text{SVT}'(\lambda, n)$  に対し,  $T_{i,j} \neq (T_P)_{i,j}$  をみたく最小の箱を特定する. このとき, 写像  $\iota_P : \text{SSVT}'_P(\lambda, n) \rightarrow \text{SSVT}'_P(\lambda, n)$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} \iota_P : \text{SSVT}'_P(\lambda, n) &\rightarrow \text{SSVT}'_P(\lambda, n) \\ T_{i,j} &\mapsto \begin{cases} T_{i,j} \setminus (T_P)_{i,j} & (T_{i,j} \cap (T_P)_{i,j} \neq \emptyset), \\ T_{i,j} \sqcup (T_P)_{i,j} & (T_{i,j} \cap (T_P)_{i,j} = \emptyset), \end{cases} \\ T_{\tilde{i}, \tilde{j}} &\mapsto T_{\tilde{i}, \tilde{j}} \quad ((\tilde{i}, \tilde{j}) \neq (i, j)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

例 1.2 の  $T^{(1)}, T^{(2)} \in \text{SSVT}'_P(\lambda, 3)$  に対し,  $\iota_P$  を作用させると, 次のようになる.

$$T^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3' \\ \hline & 2 & 23' & \\ \hline & & 3 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \iota_P(T^{(1)}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3' \\ \hline & 2 & 3' & \\ \hline & & 3 & \\ \hline \end{array}.$$

$$T^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2' & 2 & 23' \\ \hline & 2 & 3' & \\ \hline & & 3 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \iota_P(T^{(2)}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 12' & 2 & 23' \\ \hline & 2 & 3' & \\ \hline & & 3 & \\ \hline \end{array}.$$

写像  $\iota_P$  は well-defined であり,  $\iota_P^2 = \text{id}$ ,  $|\iota(T)| = |T| \pm 1$  ( $T \neq T_0$ ) をみたす. これより, 次が成り立つ.

$$GP_\lambda(\beta, \beta, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|T_P|} + \sum_{T \in \text{SSVT}'_P(\lambda, n)} (-\beta^{-1})^{|T| - |\lambda|} \beta^{|T|} = \beta^{|\lambda|} = \beta^7.$$

定理 2.1 を用いて, 以下が成り立つことを示した.

**系 2.1.** 任意の  $\lambda \in \mathcal{SP}$  に対して, 位数  $|\text{SSVT}'_P(\lambda, n)|$  かつ  $|\text{SSVT}'_Q(\lambda, n)|$  は共に奇数である.

## 2.2 歪 GP 函数 $GP_{\lambda/\mu}$ および GQ 函数 $GQ_{\lambda/\mu}$ の特殊値とシフトセットタブローの個数の奇数性

非負整数  $l, m$  ( $l \geq m$ ) のストリクトな分割  $\lambda \in \mathcal{SP}_l$  と  $\mu \in \mathcal{SP}_m$  に対し, 全ての  $i$  について  $\lambda_i \geq \mu_i$  が成り立つとき,  $\lambda \supseteq \mu$  と書く. もし,  $\ell(\lambda) > \ell(\mu)$  の場合は,  $\mu$  の長さが  $\lambda$  の長さ一致するように  $\mu$  の成分へ 0 を挿入する. このとき, これら  $\lambda, \mu$  ( $\lambda \supseteq \mu$ ) の差を次のように定める.

$$\lambda - \mu := (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \dots, \lambda_{\ell(\mu)} - \mu_{\ell(\mu)}, \lambda_{\ell(\mu)+1}, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)})$$

この  $\lambda - \mu$  を  $\lambda/\mu$  と表記し, 対応する集合を次のように定義する.

$$\text{SSYD}_{\lambda/\mu} := \{(i, j) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda), \mu_i + i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}.$$

この集合を, 形が  $\lambda/\mu$  のシフトされた歪 Young 図形とよぶ. シフトされた歪 Young 図形  $\lambda/\mu$  も, シフト Young 図形と同様に箱を用いて図示する. また, 2 つのストリクトな分割の差  $\lambda/\mu$  ( $\lambda \supseteq \mu$ ) とその対応するシフトされた歪 Young 図形は同じものと見なす. たとえば,  $\lambda = (6, 4, 3, 1) \in \mathcal{SP}_{14}$  と  $\mu = (4, 2) \in \mathcal{SP}_6$  に対する, シフトされた歪 Young 図形は次のようになる.

$$\lambda/\mu = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \square & \square & \\ & & \square & \square & \square & \\ & & & \square & \square & \\ & & & & \square & \end{array} - \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \\ & & \square & \\ & & & \square \end{array} = \begin{array}{cccc} & & \square & \square \\ & \square & \square & \square \\ & & \square & \square \\ \square & \square & \square & \\ & \square & & \square \end{array}. \quad (2.5)$$

シフトされた歪 Young 図形の対角成分の箱たちは,  $\lambda$  に属するものとして考える.

シフトされた歪 Young 図形  $\lambda/\mu \in \text{SSYD}_{\lambda/\mu}$  に対して, シフトされた歪半標準盤 (以下, 歪シフトタブロー) を, 定義 1.1 の条件をみたす図として定める. 形が  $\lambda/\mu$ , 変数の個数が  $n$  個であるすべての歪シフトタブロー全体の集合を  $\text{ShT}'_P(\lambda/\mu, n)$  と書く. また, 定義 1.1 の条件 (4) を除外した場合のすべての歪シフトタブローを  $\text{ShT}'_Q(\lambda/\mu, n)$  と記す. 歪シフトタブロー  $T$  について, ウェイトと単項式を同様に定める. 歪 Schur  $P$  函数, 歪 Schur  $Q$  函数は各々次で定義される.

$$P_{\lambda/\mu}(x) := \sum_{T \in \text{ShT}'_P(\lambda/\mu, n)} x^{\omega(T)}, \quad (2.6)$$

$$Q_{\lambda/\mu}(x) := \sum_{T \in \text{ShT}'_Q(\lambda/\mu, n)} x^{\omega(T)}. \quad (2.7)$$

これらの  $K$  理論版が Lewis-Marberg [3] によって導入された. 与えられた  $\lambda/\mu$  に対して, シフトされた集合値歪半標準盤 (以下, 歪シフトセットタブロー) を定義 1.2 の条件をみたま図として定義する. 形が  $\lambda/\mu$  であり, 変数の個数が  $n$  であるすべての歪シフトセットタブローの集合を  $\text{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)$  と表記する. 歪シフトセットタブロー  $T \in \text{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)$  に対して, 重みを (1.1) で定め, 単項式を  $x^{\omega(T)}$  (1.2) により定義する. さらに, 定義 1.2 の条件 (4) を除外した場合の形が  $\lambda$ , 変数の個数が  $n$  である歪シフトセットタブロー全体の集合を  $\text{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)$  と書き,  $T \in \text{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)$  に対しても, ウェイト  $\omega(T)$  と単項式  $x^{\omega(T)}$  を同様に定める. このとき, [3] ([5] も参照) に従い, 歪  $GP$  函数と歪  $GQ$  函数を各々次で定義する.

$$GP_{\lambda/\mu}(x | \beta) := \sum_{T \in \text{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)} \beta^{|T| - |\lambda/\mu|} x^{\omega(T)},$$

$$GQ_{\lambda/\mu}(x | \beta) := \sum_{T \in \text{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)} \beta^{|T| - |\lambda/\mu|} x^{\omega(T)}.$$

第 1.2 節と同様に,  $\beta = 0$  とすれば,  $GP_{\lambda/\mu}(x | 0) = P_{\lambda/\mu}(x)$  かつ  $GQ_{\lambda/\mu}(x | 0) = Q_{\lambda/\mu}(x)$  である. 歪  $GP$  函数  $GP_{\lambda/\mu}$  と歪  $GQ$  函数  $GQ_{\lambda/\mu}$  に対して, 定理 2.1 と同様の結果を明らかにした.

**定理 2.2** ([4]). 任意の  $\lambda/\mu$  ( $\lambda \supseteq \mu$ ) に対して, 次が成り立つ.

$$GP_{\lambda/\mu}(\beta, \dots, \beta | -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda/\mu|}, \quad (2.8)$$

$$GQ_{\lambda/\mu}(\beta, \dots, \beta | -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda/\mu|}. \quad (2.9)$$

証明は, 定理 2.1 と同様に符号反転対合  $\iota_P^{\text{skew}}$  と  $\iota_Q^{\text{skew}}$  を構成することにより示した. 以下に,  $\iota_Q^{\text{skew}}$  の作用の例を与える.

**例 2.2.** 式 (2.5) の歪 Young 図形を考え,  $n = 5$  とする. このとき,  $T_Q \in \text{SSVT}_Q(\lambda/\mu, 5)$  は次である.

$$T_Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1' & 1 \\ 1' & 1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1' & 1 & 2' \\ & 2' & \end{array} \end{array}.$$

歪シフトセットタブロー  $T^{(3)}, T^{(3)} \in \text{SSVT}_Q(\lambda/\mu, 5)$  をとり, 各々に  $\iota_Q^{\text{skew}}$  を作用させると以下のようなになる.

$$T^{(3)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1' & 1 & 23 \\ 1' & 1 & \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1' & 1 & 2' \\ & 2' & \end{array} \end{array} \longrightarrow \iota_Q^{\text{skew}}(T^{(3)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1' & 1 & 23 \\ 1' & 1 & \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1' & 1 & 2' \\ & 2' & \end{array} \end{array}.$$

$$T^{(4)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3' & 345 \\ 1' & 34' & \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1' & 1 & 4'5 \\ & 2' & \end{array} \end{array} \longrightarrow \iota_Q^{\text{skew}}(T^{(4)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1'3' & 345 \\ 1' & 34' & \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1' & 1 & 4'5 \\ & 2' & \end{array} \end{array}.$$

定理 2.2 から、以下が成り立つことを示した。

**系 2.2.** 任意の  $\lambda/\mu$  ( $\lambda \supseteq \mu$ ) に対して、位数  $|\text{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)|$  かつ  $|\text{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)|$  は奇数である。

### 2.3 歪 GP 函数 $GP_{\lambda//\mu}$ および歪 GQ 函数 $GQ_{\lambda//\mu}$ の特殊値と歪シフトセットタブラーの個数について

歪 GP 函数と歪 GQ 函数にはもう 1 つの種類が存在する。ストリクトな分割  $\mu \in \mathcal{SP}_m$  に対して、 $\mu \setminus \{(i, j)\} \in \mathcal{SP}_{m-1}$  となるとき、位置  $(i, j) \in \mu$  を取り除き可能な箱 (removable box) とよぶ。Rem( $\mu$ ) を、 $\mu$  の取り除き可能な箱すべての集合とする。このとき、歪 GP 函数  $GP_{\lambda//\mu}$  および  $GQ_{\lambda//\mu}$  が Lewis-Marberg [3] により、以下のように定義された。

$$GP_{\lambda//\mu}(x | \beta) := \sum_{\nu \subseteq \mu} \beta^{|\mu/\nu|} GP_{\lambda/\nu}(x | \beta), \quad (2.10)$$

$$GQ_{\lambda//\mu}(x | \beta) := \sum_{\nu \subseteq \mu} \beta^{|\mu/\nu|} GQ_{\lambda/\nu}(x | \beta). \quad (2.11)$$

どちらの和においても、 $\mu/\nu \subseteq \text{Rem}(\mu)$  を満たすストリクトな分割  $\nu \subseteq \mu$  全体をわたる。もし  $\mu \not\subseteq \lambda$  ならば、 $GP_{\lambda//\mu}(x | \beta) = 0$  および  $GQ_{\lambda//\mu}(x | \beta) = 0$  とする。

ここで、変数  $x, y \in \mathbb{C}^n$  に対し対称函数  $f(x, y) := f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$  とする。このとき、歪 Schur  $P$  函数、 $Q$  函数は次のようにも定義できる [8]。

$$P_\lambda(x, y) = \sum_{\nu} P_\nu(x) P_{\lambda/\nu}(y), \quad (2.12)$$

$$Q_\lambda(x, y) = \sum_{\nu} Q_\nu(x) Q_{\lambda/\nu}(y). \quad (2.13)$$

ここで、和の  $\nu$  は全てのストリクトな分割をわたる。

これらの  $K$  理論版として、歪 GP 函数  $GP_{\lambda//\mu}$  および歪 GQ 函数  $GQ_{\lambda//\mu}$  は以下の関係式をみたす [1] ([3, 6] も参照)。

$$GP_\lambda(x, y | \beta) = \sum_{\nu} GP_\nu(x | \beta) GP_{\lambda/\nu}(y | \beta), \quad (2.14)$$

$$GQ_\lambda(x, y | \beta) = \sum_{\nu} GQ_\nu(x | \beta) GQ_{\lambda/\nu}(y | \beta). \quad (2.15)$$

2 種類の歪 GP 函数  $GP_{\lambda/\mu}$  と  $GP_{\lambda//\mu}$  (GQ 函数 ( $GQ_{\lambda/\mu}$  と  $GQ_{\lambda//\mu}$  についても同様) は一般には相異なる。これらの違いを明確に示す結果の 1 つとして、次の結果を導出した。証明には、定理 2.2 を用いた。

**系 2.3.** 任意の  $\emptyset \neq \mu \subseteq \lambda$  について、次が成り立つ。

$$GP_{\lambda//\mu}(\beta, \dots, \beta | -\beta^{-1}) = 0, \quad (2.16)$$

$$GQ_{\lambda//\mu}(\beta, \dots, \beta | -\beta^{-1}) = 0. \quad (2.17)$$



## 謝辞

第 21 回数学総合若手研究集会での講演の機会を与えていただき、世話人の皆様に心より感謝申し上げます。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148 の支援を受けたものです。

## 参考文献

- [1] Y.-C. Chiu and E. Marberg, *Expanding  $K$ -theoretic Schur  $Q$ -functions*, Algebraic Combinatorics, **6**(6): 1419–1445, 2023.
- [2] T. Ikeda and H. Naruse,  *$K$ -theoretic analogues of factorial Schur  $P$ - and  $Q$ -functions*, Advances in Mathematics, **243**: 22–66, 2013.
- [3] J. B. Lewis and E. Marberg, *Enriched set-valued  $P$ -partitions and shifted stable Grothendieck polynomials*, Mathematische Zeitschrift, **299**: 1929–1972, 2021.
- [4] T. Nobukawa, and T. Shimazaki, *Special values of  $K$ -theoretic Schur  $P$ - and  $Q$ -functions*, arXiv:2410.15739, 2024.
- [5] H. Naruse, *Excited Young diagram and Yang-Baxter relations*, Lecture in The Mathematical Society of Japan, in Japanese, 2011.
- [6] E. Marberg, *Shifted combinatorial Hopf algebras from  $K$ -theory*, Algebraic Combinatorics, **7**(4): 1123–1156, 2024.
- [7] I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **139**: 155–250, 1911.
- [8] J. R. Stembridge, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups*, Advances in Mathematics, **74**(1): 87–134, 1989.